

文章编号: 1000-8055(2010)02-0384-04

正态分布定时无失效数据可靠性分析方法

傅惠民, 张勇波

(北京航空航天大学 小样本技术研究中心, 北京 100191)

摘 要: 定时无失效是指产品试验到预定的时间未发生失效的情况, 定时无失效数据的处理是当前工程中亟需解决的问题。为此, 提出一种正态分布定时无失效数据可靠性分析方法, 该方法能够根据定时无失效数据对产品进行高置信水平的可靠性评定。分别针对标准差或标准差上限已知的情况进行了详细讨论, 给出了可靠度和使用寿命的单侧置信下限。并结合某型号卫星推力器脉冲点火试验得到的定时无失效数据, 进行了分析计算, 结果表明本方法既可以充分利用定时无失效数据, 又能最大化发挥对数正态分布置信下限较高的优点, 且计算简单, 便于工程应用。

关 键 词: 正态分布; 定时无失效数据; 寿命; 可靠性; 卫星推力器; 置信限

中图分类号: TB301; O211

文献标识码: A

Method of reliability analysis for time truncated zero-failure data based on normal distribution

FU Hui-min, ZHANG Yong-bo

(Research Center of Small Sample Technology,

Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: The term 'time truncated zero-failure' means the product under experiment does not fail at the end of the experiment, and this is a pressing problem in engineering to solve problems related to time truncated zero-failure data. In this paper, a method of reliability analysis for time truncated zero-failure data based on normal distribution was presented, providing reliability assessment of a product with high confidence using the information from time truncated zero-failure data. The one-side lower confidence limits of liability and life were calculated in this paper when the standard deviation or its higher limit was known. Then, time truncated time zero-failure data from some satellite thrust tests with normal distribution, were analyzed. The results indicate that the method in this paper can make full use of both the information from these data and the higher one-side lower confidence limits of lognormal distribution. The method provided in this paper can be easily realized for the benefit of engineering application.

Key words: normal distribution; time truncated zero-failure data; life; reliability; satellite engine; confidence limits

随着航空航天产品质量的不断提高, 服役时间的延长, 在定时截尾试验中常常遇到无失效数

据, 即定时无失效数据, 由于这种数据是人为中止试验得到, 无法根据它获得产品对数寿命的标准

收稿日期: 2009-11-16; 修订日期: 2010-01-14

基金项目: 国家自然科学基金(10472006); 北京市教育委员会共建项目(XK100060418)

作者简介: 傅惠民(1956-), 男, 浙江遂昌人, “长江学者”特聘教授, 博士, 从事小样本信息技术、软校准技术、数据融合方法及可靠性研究。

差,所以传统方法不能进行定时无失效数据的可靠性分析^[1-8].目前,工程中常常将定时无失效数据中的一个看成失效数据进行处理,结果导致人为地压低了产品的可靠寿命.本文对此进行了深入研究,针对工程中虽然对数寿命标准差通常是未知的,但是标准差上限已有大量统计资料的这一情况^[9],在文献[10]给出的无失效数据秩分布的基础上,建立了对数寿命标准差上限已知时的定时无失效数据可靠性评估和寿命预测方法,给出了产品使用寿命和可靠度的单侧置信下限,解决了正态分布定时无失效数据可靠性分析难题.

1 标准差已知时使用寿命和可靠度的单侧置信下限

设某产品的对数寿命 $x_i = \lg t_i, i = 1, 2, \dots, n$ 服从正态分布 $N(\mu, \sigma)$, 其中 μ 为均值, σ 为标准差, 现从该批产品中抽取 n 个进行定时截尾试验, 试验到规定的时刻试验到规定的时刻 t_0 所有产品均未失效, 得到定时无失效数据. 设产品可靠度为 R 的使用寿命 x_R 由下式定义

$$x_R = \mu - u_R \sigma \quad (1)$$

式中 u_R 是可靠度为 R 的标准正态偏量

$$R = \Phi(u_R) = \int_{-\infty}^{u_R} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \quad (2)$$

可通过计算或查表求得^[11-12].

1.1 可靠寿命置信下限

当标准差 σ 已知时, 对于给定的可靠度 R , 其对数寿命 x_R 的置信度为 γ 的单侧置信下限 $x_{R\text{low}}$ 由下式计算

$$x_{R\text{low}} = x_0 - (u_R - u_{R_0\text{low}}) \sigma \quad (3)$$

式中点 $x_0 = \lg t_0, R_{0\text{low}} = (1 - \gamma)^{\frac{1}{n+1}}$.

证明: 根据文献[10]可知, 在 $x_0 = \lg t_0$ 处的可靠度 R_0 的置信度为 γ 的单侧置信下限 $R_{0\text{low}}$ 为

$$R_{0\text{low}} = (1 - \gamma)^{\frac{1}{n+1}} \quad (4)$$

$$\text{即 } P\{R_{0\text{low}} \leq R_0\} = \gamma \quad (5)$$

所以

$$P\{u_{R_0\text{low}} \leq u_R\} = \gamma \quad (6)$$

$$P\{\mu - u_{R_0\text{low}} \sigma \geq \mu - u_R \sigma\} = \gamma \quad (7)$$

由式(1)可得

$$P\{\mu - u_{R_0\text{low}} \sigma \geq x_0\} = \gamma \quad (8)$$

$$P\{\mu - u_R \sigma \geq x_0 - (u_R - u_{R_0\text{low}}) \sigma\} = \gamma \quad (9)$$

由式(1)和式(3)得到

$$P\{x_R \geq x_{R_0\text{low}}\} = \gamma \quad (10)$$

式(3)证毕.

1.2 可靠度置信下限

同样, 对于给定寿命 $x = \lg t$, 其可靠度 R 的置信度为 γ 的单侧置信下限 R_{low} 由下式给出

$$R_{\text{low}} = \Phi\left(u_{R_0\text{low}} + \frac{x_0 - x}{\sigma}\right) \quad (11)$$

证明: 由式(10)可知

$$P\{x \geq x_0 - (u_R - u_{R_0\text{low}}) \sigma\} = \gamma$$

所以

$$P\{x + (u_R - u_{R_0\text{low}}) \sigma \geq x_0\} = \gamma \quad (12)$$

$$P\left\{u_R \geq u_{R_0\text{low}} + \frac{x_0 - x}{\sigma}\right\} = \gamma \quad (13)$$

$$P\left\{R \geq \Phi\left(u_{R_0\text{low}} + \frac{x_0 - x}{\sigma}\right)\right\} = \gamma \quad (14)$$

令

$$R_{\text{low}} = \Phi\left(u_{R_0\text{low}} + \frac{x_0 - x}{\sigma}\right) \quad (15)$$

即

$$P\{R \geq R_{\text{low}}\} = \gamma \quad (16)$$

式(11)证毕.

2 标准差上限已知时使用寿命和可靠度的单侧置信下限

2.1 对数寿命标准差上限确定

由于无失效数据往往是人为中止试验得到, 通常不包含寿命随机分布的正确信息, 即无法根据定时无失效数据获得产品寿命分布的标准差. 上节给出了标准差 σ 已知时, 定时无失效数据使用寿命和可靠度的单侧置信下限的估计. 但工程实际中标准差 σ 往往是未知的, 只能根据以往积累的试验数据及工程经验给出其上限值 σ_0 . 例如通过长期以来积累的大量试验数据^[11], 对于铝合金结构对数寿命标准差上限值 σ_0 一般为 0.12, 对于钛合金结构一般为 0.15, 而钢结构一般为 0.2.

因此, 下面将建立对数寿命标准差上限已知时的定时无失效数据可靠性分析方法.

2.2 可靠寿命置信下限

设 n 个产品试验到规定的时刻 t_0 均未失效, 则当给定的可靠度 R 满足条件

$$R \geq (1 - \gamma)^{\frac{1}{n+1}} \quad (17)$$

时,其对数寿命 x_R 的置信水平为 γ 的单侧置信下限 x_{Rlow}^* 为

$$x_{Rlow}^* = x_0 - (u_R - u_{R_{0low}})\sigma_0 \tag{18}$$

证明: 由式(17) 可知,有

$$u_R \geq u_{R_{0low}} \tag{19}$$

又因为

$$\sigma \leq \sigma_0 \tag{20}$$

所以根据式(9) ,可得

$$\begin{aligned} P\{\mu - u_R\sigma \geq x_0 - (u_R - u_{R_{0low}})\sigma_0\} &\geq \\ P\{\mu - u_R\sigma \geq x_0 - (u_R - u_{R_{0low}})\sigma\} &= \gamma \end{aligned} \tag{21}$$

$$\text{即} \quad P\{x_R \geq x_{R_{low}}^*\} = \gamma \tag{22}$$

式(18) 证毕.

2.3 可靠度置信下限

同理,当给定的寿命 t 满足条件

$$t \leq t_0 \tag{23}$$

时,其可靠度 R 的置信水平为 γ 的单侧置信下限 R_{low}^* 为

$$R_{low}^* = \Phi\left(u_{R_{0low}} + \frac{x_0 - x}{\sigma_0}\right) \tag{24}$$

证明: 由式(23) 有

$$x \leq x_0 \tag{25}$$

根据式(20) ,得

$$\frac{x_0 - x}{\sigma_0} \leq \frac{x_0 - x}{\sigma} \tag{26}$$

$$u_{R_{0low}} + \frac{x_0 - x}{\sigma_0} \leq u_{R_{0low}} + \frac{x_0 - x}{\sigma} \tag{27}$$

$$\Phi\left(u_{R_{0low}} + \frac{x_0 - x}{\sigma_0}\right) \leq \Phi\left(u_{R_{0low}} + \frac{x_0 - x}{\sigma}\right) \tag{28}$$

$$\text{即} \quad R_{low}^* \leq R_{low} \tag{29}$$

所以

$$P\{R \geq R_{low}^*\} \geq P\{R \geq R_{low}\} = \gamma \tag{30}$$

式(20) 证毕.

3 实 例

3.1 实例 1

某型号卫星推力器进行脉冲点火试验,同批次抽取 5 只进行,其试验数据列于表 1. 现要求该

推力器对应 $t = 26$ 万次脉冲点火的置信水平 $\gamma = 0.9$ 的可靠度置信下限.

该卫星推力器失效模式为燃烧室或喉管烧坏,而燃烧室和喉管所用材料为钛铌合金,根据 2.1 节可知,钛合金取 $\sigma_0 = 0.15$.

由于 $x_0 = \lg t_0 = 1.72$, 所以满足式(23) 条件

$$x = \lg t = 1.41 \leq x_0$$

对于给定的置信水平 $\gamma = 0.9$, 可以求得

$$R_{0low} = (1 - \gamma)^{\frac{1}{n+1}} = 0.68$$

再根据式(24) 可以得到给定寿命的可靠度置信下限为

$$R_{low}^* = \Phi\left(u_{R_{0low}} + \frac{x_0 - x}{\sigma_0}\right) = 0.993$$

因此,该推力器对应 $t = 26$ 万次脉冲点火的置信水平的可靠度置信下限为 0.993.

表 1 某型号卫星推力器定时无失效试验数据

Table 1 Time truncated zero-failure data of satellite engine

序号 <i>i</i>	中止次数 (Suspended times <i>T_i</i>) / 万次
1	> 52
2	> 52
3	> 52
4	> 52
5	> 52

3.2 实例 2

某型号飞机铝合金结构进行定时截尾疲劳寿命试验,经过 10^6 次疲劳循环均未发生破坏,得到定时无失效数据列于表 2. 现要求该铝合金结构对应 $R = 0.999$ 的置信水平 $\gamma = 0.95$ 的可靠寿命置信下限.

由于该飞机构件为铝合金构件,根据 2.1 节可知,铝合金取 $\sigma_0 = 0.15$. 而 $R = 0.999$, 所以满足式(17) 条件

$$R \geq (1 - \gamma)^{\frac{1}{n+1}} = 0.37$$

再根据式(18) 可以得到该铝合金置信水平 $\gamma = 0.95$, $R = 0.999$ 的可靠寿命置信下限为

$$x_{Rlow}^* = x_0 - (u_R - u_{R_{0low}})\sigma_0 = 5.59$$

即可靠寿命 t_R 的置信下限 t_{Rlow} 为

$$t_{Rlow} = 10^{x_{Rlow}^*} = 389\,045$$

因此,该铝合金结构对应 $R = 0.999$ 的置信水平 $\gamma = 0.95$ 的可靠寿命置信下限为 389 045 次.

表 2 某型号飞机铝合金结构定时无失效试验数据
Table 2 Time truncated zero-failure data of aluminum alloy airplane component

序号 i	中止次数 (Suspended times T_i)/ 10^3 次
1	> 1000
2	> 1000

3 结 论

- 1) 由于定时无失效数据是人为中止其试验,所以这种数据不包含寿命分散性的正确信息,因而也就无法根据定时无失效数据求得对数寿命标准差.
- 2) 工程实际中,虽然对数寿命标准差通常是未知的,但是可以根据以往积累的大量统计资料得到对数寿命标准差的上限值.
- 3) 在对数正态分布标准差上限 σ 已知的情况下,提出一种定时无失效数据可靠性分析方法,给出了产品使用寿命和可靠度的单侧置信下限.
- 4) 根据中心极限定理可知,产品寿命通常服从对数正态分布,对数正态分布具有可靠寿命和可靠度置信下限较高的优点.
- 5) 大量工程实例计算表明,本文方法可以有效地提高可靠性分析的精度,并且便于工程应用.

参考文献:

[1] 茆诗松,王玲玲. 加速寿命试验 [M]. 北京:科学出版社,1997.
MAO Shisong, WANG Lingling. Accelerated life testing [M]. Beijing: Science Press, 1997. (in Chinese)

[2] 王玲玲,陈元. 对数正态分布定时截尾样本下的寿命试验与加速寿命试验的统计分析[J]. 应用数学学报,1994,17(1):109-117.
WANG Lingling, CHEN Yuan. Statistical analysis of life test and accelerated life test under type I censoring of lognormal distribution[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 1994, 17(1): 109-117. (in Chinese)

[3] 张志华. 对数正态分布定时截尾样本下加速寿命试验的统计分析[J]. 应用数学学报,2000,23(4):488-496.
ZHANG Zhihua. Statistical analysis of accelerated life test on lognormal distribution case under type I censoring

[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2000, 23(4): 488-496. (in Chinese)

[4] 王炳兴,王玲玲. 定时截尾下指数分布的修正最大似然估计[J]. 高校应用数学学报,1995,3:295-302.
WANG Bingxing, WANG Lingling. The modified maximum likelihood estimation for the exponential distribution under type I censoring[J]. Applied Mathematics Journal of Chinese Universities, 1995, 3: 295-302. (in Chinese)

[5] 刘有新,方龙祥. 定数截尾数据缺失场合下 Weibull 分布的 bayes 统计分析[J]. 安徽师范大学学报(自然科学版), 2007,30(2):116-119.
LIU Youxin, FANG Longxiang. Bayesian analysis for the parameter of the weibull distribution under multiply type II censoring [J]. Journal of Anhui Normal University (Natural Science), 2007, 30(2): 116-119. (in Chinese)

[6] 王乃生,王玲玲. 定数截尾数据缺失场合下指数分布参数的 bayes 估计[J]. 应用概率统计,2001,17(3):229-235.
WANG Naisheng, WANG Lingling. Bayesian estimation for the parameter of exponential distribution under multiply type II censoring[J]. Chinese Journal of Applied Probability and Statistics, 2001, 17(3): 229-235. (in Chinese)

[7] 翟伟丽,茆诗松. 定时截尾场合下双参数指数分布的参数估计[J]. 应用概率统计,2002,18(2):197-204.
ZHAI Weili, MAO Shisong. Parameter estimation of exponential distribution with two parameters under type I censoring sample [J]. Chinese Journal of Applied Probability and Statistics, 2002, 18(2): 197-204. (in Chinese)

[8] 张志华. 定时随机截尾数据情况下 Weibull 分布参数的矩估计[J]. 工程数学学报,2000,17(3):43-49.
ZHANG Zhihua. Moment estimation of weibull distribution under type I random censorship [J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2000, 17(3): 43-49. (in Chinese)

[9] 高镇同. 疲劳应用统计学 [M]. 北京:国防工业出版社,1986.
GAO Zhentong. Applied statistics in fatigue [M]. Beijing: Press of National Defense Industry, 1986. (in Chinese)

[10] 傅惠民. 不完全数据秩分布理论[J]. 航空学报,1993,14(11):A578-A584.
FU Huimin. Theory of incomplete data rank distributions [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 1993, 14(11): A578-A584. (in Chinese)

[11] 戴树森,费鹤良,王玲玲. 可靠性试验及其统计分析 [M]. 北京:国防工业出版社,1983.
DAI Shusen, FEI Heliang, WANG Lingling. Reliability test and statistical analysis [M]. Beijing: Press of National Defense Industry, 1983. (in Chinese)

[12] 刘文琰. 结构可靠性设计手册 [M]. 北京:国防工业出版社,2008.
LIU Wenting. Structural reliability design handbook [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2008. (in Chinese)